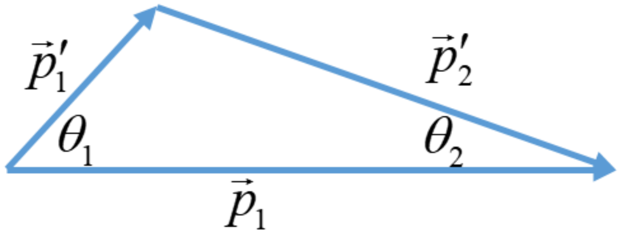
**Лекція № 9**

Продовжуємо розгляд пружного зіткнення двох частинок. Отримали кути розльоту $\theta_1, \theta_2$ в л-системі (ф-ли (3.33) та (3.34)).

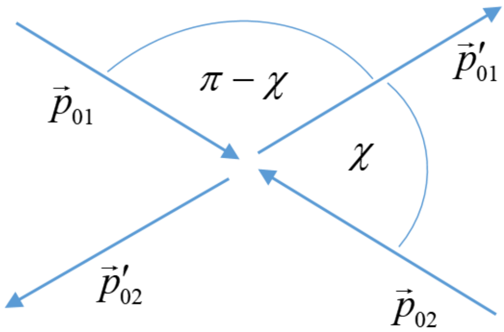



Напишемо їх ще раз

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{p_1 p_1'}\left[\varepsilon_1'\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right) - m_1^2 c^2 - \varepsilon_1 m_2\right];$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{p_1 p_2'}\left(m_2 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_2'}{c^2} - m_2\right)c^2.$$

Отримали вираз (див. ф-лу (3.37)) для частки переданої енергії, виразивши її через імпульс $p_0$ (в ц-системі $|\vec{p}_{01}| = |\vec{p}_{01}'| = |\vec{p}_{02}| = |\vec{p}_{02}'| = p_0$ ) та кут повороту в ц-системі частинки 1:




$$\Delta\varepsilon = \frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi).$$

Виразимо квадрат імпульсу $p_0^2$ (ц-система) через величини л-системи, для чого скористаємось інваріантом $p_1^i p_{2i} = p_{01}^i p_{02i}$. 4-імпульси до зіткнення в л-системі

$$p_1^i = \left(\frac{\varepsilon_1}{c}, \vec{p}_1\right); \quad p_2^i = (m_2 c, 0).$$

В ц-системі

$$p_{01}^{i}=\left(\frac{\varepsilon_{01}}{c},\vec{p}_{01}\right);\quad p_{02}^{i}=\left(\frac{\varepsilon_{02}}{c},-\vec{p}_{01}\right)$$

$$p_1^i p_{2i}=p_{01}^i p_{02i};$$

$$m_2\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_{01}\varepsilon_{02}}{c^2}+p_0^2;$$

$$m_2\varepsilon_1-p_0^2=\sqrt{(p_0^2+m_1^2c^2)(p_0^2+m_2^2c^2)};$$

$$(m_2\varepsilon_1-p_0^2)^2=(p_0^2+m_1^2c^2)(p_0^2+m_2^2c^2);$$

$$m_2^2\varepsilon_1^2-2m_2\varepsilon_1p_0^2+\cancel{p_0^4}=\cancel{p_0^4}+p_0^2(m_1^2+m_2^2)c^2+m_1^2m_2^2c^4;$$

$$p_0^2=\frac{m_2^2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1}. \tag{3.38}$$

Підставимо (3.38) в (3.37) та отримаємо частку переданої енергії через величини в л-системі

$$\Delta\varepsilon=\frac{m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1}(1-\cos\chi). \tag{3.39}$$

З формули (3.39) видно, що при $\chi=0$ передачі енергії немає. Максимальна передача енергії відбудеться при $\chi=\pi$ (лобове зіткнення)

$$\Delta\varepsilon_{\max}=\frac{2m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1}. \tag{3.40}$$

При максимальній передачі енергії

$$\varepsilon'_{1,\min}=\varepsilon_1-\frac{2m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1}. \tag{3.41}$$

Відношення кінетичних енергій першої частинки після та до лобового зіткнення

$$\frac{T_{\min}}{T_1}=\frac{\varepsilon_1-\dfrac{2m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1}-m_1c^2}{\varepsilon_1-m_1c^2}=$$

$$=\frac{(\varepsilon_1-m_1c^2)[(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1]-2m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2c^4)}{(\varepsilon_1-m_1c^2)[(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1]}=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\cancel{\varepsilon_1 - m_1c^2})\left[(m_1^2+m_2^2)c^2 + \cancel{2m_2\varepsilon_1} - 2m_2(\cancel{\varepsilon_1} + m_1c^2)\right]}{(\cancel{\varepsilon_1 - m_1c^2})[(m_1^2+m_2^2)c^2 + 2m_2\varepsilon_1]} = \\
&= \frac{(m_1^2+m_2^2-2m_1m_2)c^2}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1} = \frac{(m_1-m_2)^2c^2}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1};
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

При $m_1 = m_2$ частинка 1 зупиняється, як і в класичному випадку.

При $\varepsilon_1 \approx m_1c^2$ (класична границя) з формули (3.42) отримаємо відому формулу

$$\frac{T_{1,\min}}{T_1} = \frac{(m_1-m_2)^2c^2}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_1c^2m_2} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2.$$

Якщо $\varepsilon_1 \gg m_1c^2, m_2c^2$, з формули (3.42) випливає, що частинка 1 віддає всю кінетичну енергію, та зупиняється

$$\frac{T_{1,\min}}{T} \to 0.$$

В цьому випадку ($\varepsilon_1 \gg m_1c^2, m_2c^2$) зміна повної енергії частинки 1 при лобовому зіткненні

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'_{1,\min} &= \frac{\varepsilon_1[(m_1^2+m_2^2)c^2 + \cancel{2m_2\varepsilon_1}] - 2m_2(\cancel{\varepsilon_1^2} - m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1} = \\
&= \frac{\varepsilon_1[(m_1^2+m_2^2)c^2] + 2m_2(m_1^2c^4)}{(m_1^2+m_2^2)c^2+2m_2\varepsilon_1} \to \frac{(m_1^2+m_2^2)c^2}{2m_2}.
\end{aligned}
$$

наближається до сталої величини.

Проаналізуємо формулу (3.42) ще для випадків, коли маси частинок дуже відрізняються.

Нехай дуже легка частинка налітає на важку частинку $m_1 \ll m_2$

$$\frac{T_{1,\min}}{T_1} = \frac{\left(1-\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2}{\left(1+\dfrac{m_1^2}{m_2^2}\right)+\dfrac{2\varepsilon_1}{m_2c^2}} \approx \frac{1}{1+\dfrac{2\varepsilon_1}{m_2c^2}}.$$

Очевидно, що при $\varepsilon_1 \sim m_2c^2$ частка переданої енергії стає значною.

Якщо дуже важка частинка налітає на легку $m_1 \gg m_2$ з формули (3.42) отримаємо таку оцінку

$$\frac{T_{1,\min}}{T_1} = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}\right) + \frac{2m_2\varepsilon_1}{m_1^2c^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{2m_2\varepsilon_1}{m_1^2c^2}}.$$

Частка переданої енергії є значною при умові $\varepsilon_1 \sim \frac{m_1^2c^2}{m_2}$.

### 3.4. Тензор моменту імпульсу

В ізольованій системі частинок окрім закону збереження енергії та імпульсу існує закон збереження моменту імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу є наслідком ізотропії простору.

Момент імпульсу частинки в класичній механіці визначається, як векторний добуток

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]. \tag{3.43}$$

Векторний добуток є аксіальним вектором. В тензорних позначеннях

$$M_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(x_\beta p_\gamma - x_\gamma p_\beta). \tag{3.44}$$

Аксіальний вектор є дуальним антисиметричному тензору 2-го рангу

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}. \tag{3.45}$$

Три компоненти вектору $A_1, A_2, A_3$ та три ненульові компоненти тензору $B_{23}, B_{31}, B_{12}$ однозначно пов'язані. В тривимірному просторі можна замість вектору (3.43) можна ввести антисиметричний тензор моменту імпульсу (див. ф-лу (3.44) та визначення (3.45)):

$$M_{\beta\gamma} = x_\beta p_\gamma - x_\gamma p_\beta. \tag{3.46}$$

Компоненти вектору $\vec{M}$ та тензору $M_{\beta\gamma}$ пов'язані так:

$$M_1 = M_x = M_{23} = M_{yz};$$
$$M_2 = M_y = -M_{13} = -M_{xz};$$
$$M_3 = M_z = M_{12} = M_{xy}.$$

Природним узагальненням тривимірного тензору моменту імпульсу буде 4-тензор моменту імпульсу у вигляді

$$M^{ik} = x^i p^k - x^k p^i. \qquad (3.47)$$

Тут $x^i = (ct, \vec{r}),\ p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)$.

З формули (3.47) видно, що просторові компоненти $M^{ik}$ співпадають з класичним вектором $\vec{M}$, треба тільки замінити класичний імпульс на релятивістський

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Релятивістський вектор моменту імпульсу

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}[\vec{r}, m\vec{\upsilon}]. \qquad (3.48)$$

Просторові компоненти складають аксіальний тривимірний вектор.

Напишемо компоненти $M^{0\alpha}$:

$$M^{0\alpha} = ctp^\alpha - x^\alpha \frac{\varepsilon}{c}; \quad \alpha = 1, 2, 3. \qquad (3.49)$$

Вони складають тривимірний полярний вектор ($t, \varepsilon$ є тривимірними скалярами, $\vec{r}, \vec{p}$ – тривимірні полярні вектори), тобто маємо

$$ct\vec{p} - \frac{\varepsilon\vec{r}}{c}.$$

Контраваріантний 4-тензор моменту імпульсу має такий вигляд

$$M^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & c\left(tp_x - \frac{\varepsilon x}{c^2}\right) & c\left(tp_y - \frac{\varepsilon y}{c^2}\right) & c\left(tp_z - \frac{\varepsilon z}{c^2}\right) \\ -c\left(tp_x - \frac{\varepsilon x}{c^2}\right) & 0 & M_z & -M_y \\ -c\left(tp_y - \frac{\varepsilon y}{c^2}\right) & -M_z & 0 & M_x \\ -c\left(tp_z - \frac{\varepsilon z}{c^2}\right) & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.50)$$

(див. ф-лу (1.97) запису антисиметричного 4-тензору через полярний та аксіальний вектори для порівняння)

$$M^{ik} = \left( c\left( t\vec{p} - \frac{\varepsilon\vec{r}}{c^2} \right), -\vec{M} \right) \tag{3.51}$$

Момент імпульсу системи частинок, які не взаємодіють, зберігається внаслідок ізотропії 4-простору, тому

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i) = const. \tag{3.52}$$

Зберігання 4-тензому моменту імпульсу (3.52) означає, що зберігаються всі компоненти $M^{ik}$. Просторові компоненти складають вектор

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = const. \tag{3.53}$$

Компоненти $M^{0\alpha}$ також зберігаються, тому

$$\sum_a \left( t\vec{p}_a - \frac{\varepsilon_a}{c^2}\vec{r}_a \right) = \overrightarrow{const};$$

$$t\sum_a \vec{p}_a - \frac{1}{c^2}\sum_a \varepsilon_a \vec{r}_a = \overrightarrow{const}. \tag{3.54}$$

Повний імпульс та повна енергія замкненої системи зберігаються, тож

$$\sum_a \vec{p}_a = \overrightarrow{const};$$
$$\sum_a \varepsilon_a = const.$$

Поділимо обидві частини (3.54) на $\sum_a \varepsilon_a$

$$t\frac{\sum_a \vec{p}_a}{\sum_a \varepsilon_a} - \frac{1}{c^2}\frac{\sum_a \varepsilon_a \vec{r}_a}{\sum_a \varepsilon_a} = \overrightarrow{const};$$

$$\underbrace{\frac{\sum_a \varepsilon_a \vec{r}_a}{\sum_a \varepsilon_a}}_{\vec{R}} = \overrightarrow{const} + \underbrace{\left( \frac{c^2\sum_a \vec{p}_a}{\sum_a \varepsilon_a} \right)}_{\vec{V}} t.$$

Отримане рівняння, яке означає, що в замкненій системі існує точка – **радіус-вектор центру інерції**

$$\vec{R} = \frac{\sum_a \varepsilon_a \vec{r}_a}{\sum_a \varepsilon_a}, \qquad (3.55)$$

яка рухається прямолінійно та рівномірно зі швидкістю

$$\vec{V} = \left( \frac{c^2 \sum_a \vec{p}_a}{\sum_a \varepsilon_a} \right). \qquad (3.56)$$

$\vec{V}$ – **швидкість руху системи, як цілого**. Формула (3.56) безпосередньо випливає з формул $\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{\upsilon}}{c^2}, \vec{\upsilon} = \frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon}$ отриманих раніш для однієї частинки.

В нерелятивістському випадку формули (3.55) та (3.56) перетворюються на відомі класичні вирази

$$\vec{R} \approx \frac{\sum_a (m_a c^2) \vec{r}_a}{\sum_a (m_a c^2)} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}.$$

$$\vec{V} \approx \frac{c^2 \sum_a m_a \vec{\upsilon}_a}{\sum_a m_a c^2} = \frac{\sum_a m_a \vec{\upsilon}_a}{\sum_a m_a}.$$

Підкреслимо, що визначення радіус-вектору центру мас (3.55) справедливо тільки для системи частинок, які не взаємодіють. В релятивістській механіці визначення центру інерції частинок, що взаємодіють, потребує урахування імпульсу та енергії поля, яке ними утворюється.

Підкреслимо, що компоненти $\vec{R}$ (ф-ла (3.55)) не є просторовими компонентами 4-вектору. При переході від однієї ІСВ до іншої вони не перетворюються, як координати точки. Центр інерції системи матеріальних є різним в різних ІСВ.

## 4. ЗАРЯД В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

В класичній механіці ми користувались поняттям потенціальної енергії $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Ним можна користуватись, якщо, по-перше, швидкість розповсюдження взаємодії є нескінченною; по-друге, частинки взаємодіють між собою «безпосередньо». Класична механіка побудована на понятті «далекодія».

В теорії відносності швидкість розповсюдження взаємодій є скінченною: $\upsilon_{вз.} \le c$. Для того, щоб частинка 2 відчула зміну положення у просторі частинки 1, потрібен час $\tau = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| / \upsilon_{вз.}$.

Частинки, що взаємодіють, створюють у навколишньому просторі **силове поле**, за допомогою якого передаються взаємодії. Збурення поля, яке утворюється під час зміни положення у просторі (радіус-вектору $\vec{r}$) та швидкості руху $\vec{\upsilon}$ певної частинки, розповсюджується зі скінченною швидкістю. Частинка, що розглядається, відчуває ці зміни станів всіх інших частинок через зміни поля в тій точці, де вона знаходиться. Концепція поля – «**близькодія**» – випливає з вимог теорії відносності. В класичній механіці поле було допоміжною математичною величиною. В теорії відносності поле – **це фізична реальність**. Взаємодія може відбуватися в кожний момент тільки між сусідніми точками простору. Ми говоримо про взаємодію певної частинки з полем та про наступну взаємодію поля з іншою частинкою.

Взаємодія частинок з полем та створення поля обумовлені важливою властивістю елементарних частинок – електричним зарядом.

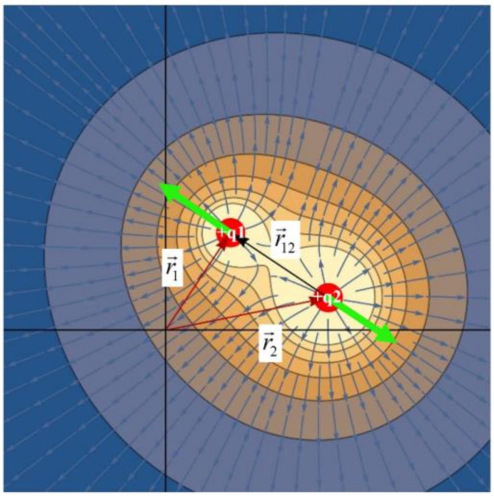
Електричний заряд – одна з основних характеристик елементарних частинок, таких як маса, спін. Поняття електричного заряду ми будемо вважати елементарним поняттям, таким, яке не потребує додаткового визначення.

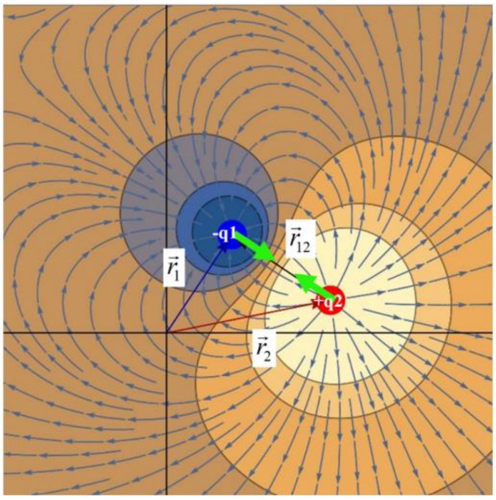
Експериментально визначити існування заряду та кількісно його характеризувати можна, завдяки взаємодії зарядів.

Існують заряди двох знаків $+q$ та $-q$ – додатні та від'ємні. Однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягаються. Дослідно встановлено (Закон Кулона (1785)), що сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів в вакуумі визначається формулою

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{4.1}$$

Коефіцієнт $k$ визначається вибором системи одиниць.




Найменший (елементарний заряд) – це заряд електрона. В Міжнародній системі одиниць (SI) він дорівнює $e = -1.6 \cdot 10^{-19}\, Кл.$ ( $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ )

В теоретичній фізиці популярна система одиниць Гауса в ній елементарний заряд дорівнює $-4.8 \cdot 10^{-10}$ одиниць заряду (emu – electromagnetic units), ($k$ = 1)

Закон Кулона ми отримаємо пізніше, як розв'язок рівнянь Максвелла при певних умовах.

В **релятивістській механіці немає поняття абсолютно твердого тіла**. Це безпосередньо випливає зі скінченності швидкості розповсюдження взаємодії. Якщо ми діємо на тіло в одній точці та приводимо його до руху, то всі його точки не можуть почати рухатися одночасно (як було в класичній механіці для абсолютно твердого тіла), бо взаємодія передається від точки до дочки зі скінченною швидкістю. Тіло обов'язково деформується.

Елементарні частинки в релятивістській механіці ми вважаємо точковими. Найбільш відомі заряджені елементарні частинки – електрон ($-e$ ), протон ($+e$). У кожної елементарної частинки є відповідна античастинка з протилежним за знаком елементарним зарядом (позітрон, антипротон).

Нейтрон, нейтрино, нейтральні мезони не мають електричного заряду, але мають магнітний момент.

Функцію дії та функцію Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі, 4-потенціал поля побудуємо на наступній лекції.